Chapitre 6 : Fonctions de la variable réelle

Table des matières

1 Fonctions réelles de la variable réelle : généralités **2**
1.1 Représentation graphique . . . 2
1.2 Parité et imparité . . . 4
1.3 Périodicité . . . 4
1.4 Monotonie . . . 5
1.5 Majoration, minoration, encadrement . . . 6
1.6 Branches infinies . . . 7

2 Continuité **7**

3 Dérivation **9**
3.1 Généralités . . . 9
3.2 Dérivées partielles pour une fonction de plusieurs variables . . . 10
3.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ . . . 11
3.4 Dérivées n-ièmes . . . 11

4 Fonctions complexes de la variable réelle **12**
4.1 Continuité . . . 12
4.2 Dérivation . . . 12

1 Fonctions réelles de la variable réelle : généralités

On s'intéresse aux fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$.

1. Lorsque l'ensemble de définition d'une fonction f n'est pas précisé, on prendra l'ensemble des réels x pour lesquels l'écriture de $f(x)$ a un sens.
2. Lorsque l'ensemble d'arrivée n'est pas précisé, on prendra $\mathbb{R}$.

Par exemple, lorsqu'on évoque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, l'ensemble de définition est défini de manière implicite comme étant $\mathbb{R}_+$, et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.1 Représentation graphique

Définition 1.2 (courbe représentative d'une fonction)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, où $D_f \subset \mathbb{R}$.
La courbe représentative de f, dans un repère orthogonal direct, est l'ensemble des points du plan qui ont pour coordonnées $\big(x, f(x)\big)$, où x décrit l'ensemble de définition D_f.

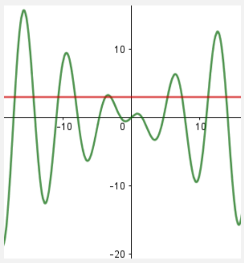
Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des points du plan dont les couples de coordonnées appartiennent au graphe de la fonction (défini comme une partie de $\mathbb{R}^2$).

Remarque : La courbe représentative d'une fonction coupe chaque droite verticale au plus une fois.

Proposition 1.3 (résolution graphique d'équations et d'inéquations)

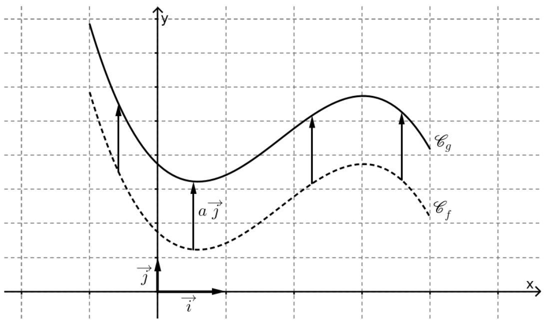
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, où $D_f \subset \mathbb{R}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal direct.

1. Les solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (horizontale) d'équation $y = \lambda$.
2. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant \lambda$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont situés au-dessus, au sens large, de la droite (horizontale) d'équation $y = \lambda$.
3. On a des énoncés similaires pour les inéquations $f(x) \leqslant \lambda$, $f(x) > \lambda$ et $f(x) < \lambda$.

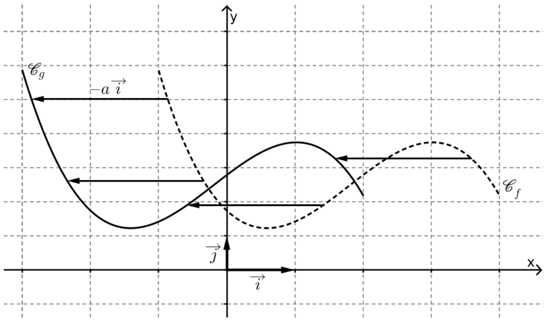


Transformations géométriques des courbes : Dans ce qui suit, f désigne une fonction de D_f (partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal direct $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ et a un réel quelconque.

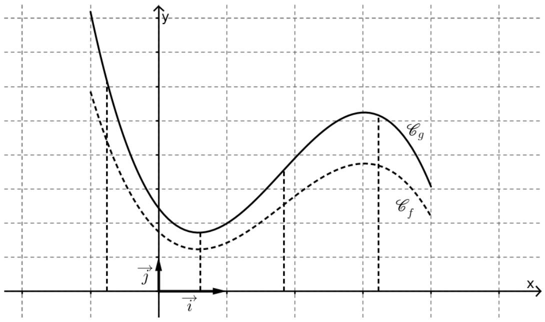
1. La fonction $g : x \mapsto f(x) + a$ a le même ensemble de définition que f, et sa courbe représentative se déduit de celle de f par la translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.



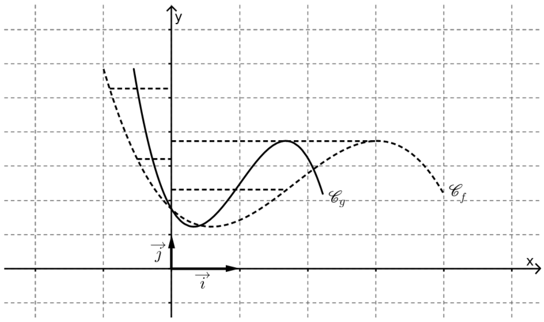
2. La fonction $g : x \mapsto f(x+a)$ a pour ensemble de définition $\{x - a \ / \ x \in D_f\}$, et sa courbe représentative se déduit de celle de f par la translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.



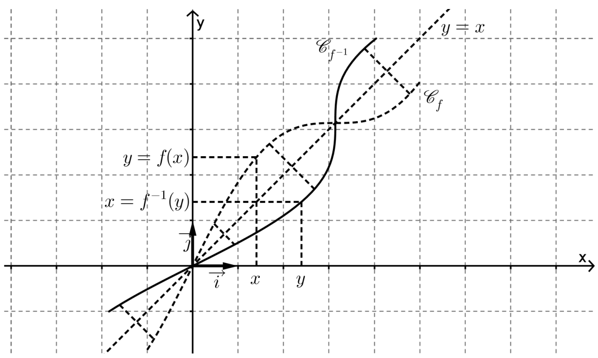
3. La fonction $g : x \mapsto af(x)$ a le même ensemble de définition que f, et sa courbe représentative se déduit de celle de f en laissant les abscisses inchangées et en multipliant les ordonnées par a.



4. Si $a \neq 0$, la fonction $g : x \mapsto f(ax)$ a pour ensemble de définition $\{\frac{x}{a} \ / \ x \in D_f\}$, et sa courbe représentative se déduit de celle de f en laissant les ordonnées inchangées et en divisant les abscisses par a.



5. Pour cette propriété, le repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ est supposé **orthonormé** direct.
   Si f est une bijection alors la représentation graphique de la bijection réciproque f^{-1} est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exemple 1.4 : Tracer les représentations graphiques de $f : x \mapsto 2\cos(4x) + 1$, $g : x \mapsto (x-1)^3$ et g^{-1}.

1.2 Parité et imparité

Définition 1.5 (fonction paire, fonction impaire)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, où D_f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ **symétrique par rapport à 0**.

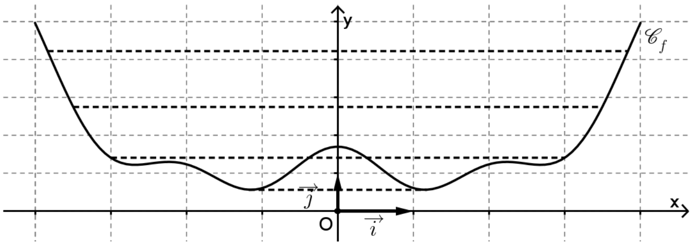
1. On dit que f est paire si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.
2. On dit que f est impaire si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarque : Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est impaire et $0 \in D_f$, on a nécessairement $f(0) = 0$.

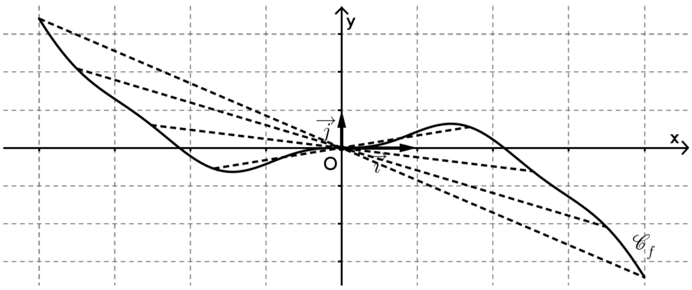
Exemple 1.6 : Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Propriétés graphiques :

1. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



2. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Proposition 1.7 (imparité de la réciproque d'une bijection impaire)

Soient I et J deux intervalles symétriques par rapport à 0, et soit $f : I \to J$ une bijection impaire. Alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est impaire.

Remarque : Attention, cette propriété n'est pas valable pour les fonctions paires.

1.3 Périodicité

Définition 1.8 (fonction périodique)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, où $D_f \subset \mathbb{R}$.

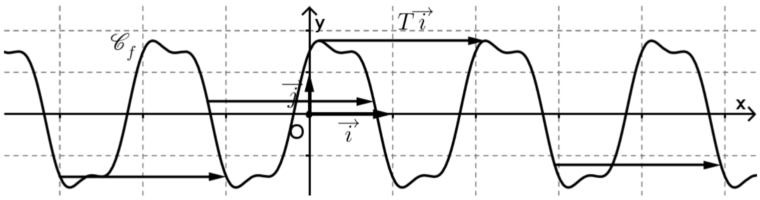
1. Pour un réel $T > 0$ donné, on dit que f est périodique de période T (ou T-périodique) si pour tout $x \in D_f$:
   - $x + T \in D_f$ et $x - T \in D_f$
   - $f(x+T) = f(x)$
2. On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est T-périodique.

Remarques :

1. Si f est T-périodique, on peut démontrer par récurrence que :
$$\forall x \in D_f,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x + kT \in D_f \text{ et } f(x + kT) = f(x)$$
2. On n'a pas unicité de la période : si T est une période de f, alors nT également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
S'il existe une plus petite période (strictement positive) pour f, celle-ci est appelée **la** période de f.
Mais certaines fonctions périodiques n'admettent pas de plus petite période : par exemple, la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (indicatrice de $\mathbb{Q}$) admet pour période n'importe quel rationnel strictement positif.
3. L'étude de la fonction sur une période permet de la connaître sur tout son ensemble de définition.

Exemple 1.9 : Sur quel ensemble doit-on étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) + 1$?

Propriété graphique : La courbe représentative d'une fonction T-périodique est invariante par la translation de vecteur $T\,\overrightarrow{i}$.



1.4 Monotonie

Définition 1.10 (fonction monotone)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$.

1. On dit que f est croissante si : $\forall a,b \in D_f,\ a \leqslant b \implies f(a) \leqslant f(b)$.
2. On dit que f est décroissante si : $\forall a,b \in D_f,\ a \leqslant b \implies f(a) \geqslant f(b)$.
3. On dit que f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 1.11 (fonction strictement monotone)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$.

1. On dit que f est strictement croissante si : $\forall a,b \in D_f,\ a < b \implies f(a) < f(b)$.
2. On dit que f est strictement décroissante si : $\forall a,b \in D_f,\ a < b \implies f(a) > f(b)$.
3. On dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 1.12 : Étudier la monotonie de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ définie sur $[0,1[$.

Proposition 1.13 (une fonction strictement monotone est injective)

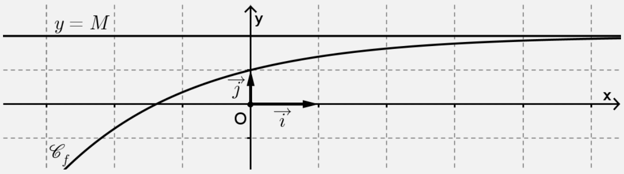
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone, alors f est injective.

1.5 Majoration, minoration, encadrement

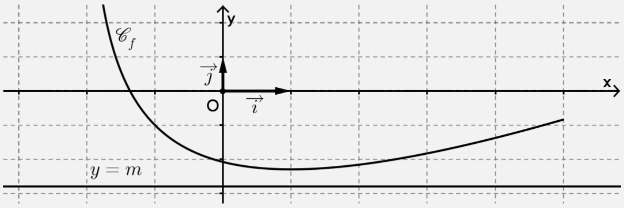
Définition 1.14 (fonction majorée, minorée, bornée)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$.

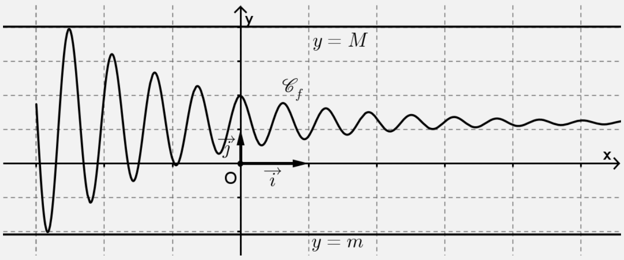
1. On dit que f est <u>majorée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant M$.
   Le réel M est appelé un <u>majorant</u> de f, et on dit que f est majorée par M.



2. On dit que f est <u>minorée</u> s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in D_f,\ f(x) \geqslant m$.
   Le réel m est appelé un <u>minorant</u> de f, et on dit que f est minorée par m.

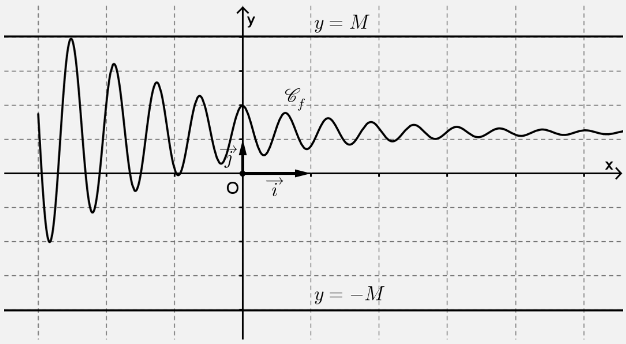


3. On dit que f est <u>bornée</u> si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in D_f,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.



Proposition 1.15 (caractérisation des fonctions bornées à l'aide de la valeur absolue)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$.
La fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in D_f,\ |f(x)| \leqslant M$.



1.6 Branches infinies

Définition 1.16 (asymptotes)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal direct.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en a lorsque

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty$$

On dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque

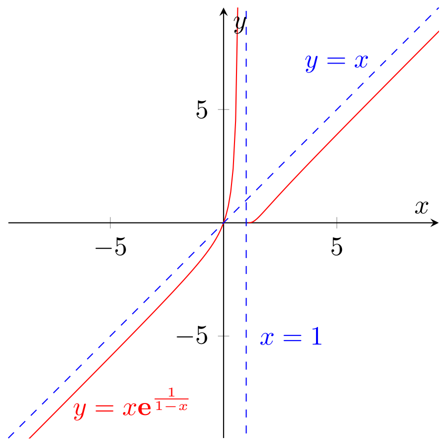
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right)$$

On dit que la droite d'équation $y = cx + d$ est une asymptote affine à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - cx) = d \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - cx) = d\right)$$

Exemple 1.17 :

Voici une partie de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale et la droite d'équation $y = x$ est une asymptote affine.



Remarque : Si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote affine en $+\infty$ alors $c = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2 Continuité

Dans cette partie et la suivante, les fonctions sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
La plupart des théorèmes cités ici sont pour l'instant admis, et seront démontrés ultérieurement.

Définition 2.1 (fonction continue)

Soit I un intervalle, et soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Pour un réel $a \in I$ donné, on dit que f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et est égale à $f(a)$.
2. On dit que f est continue sur I (ou plus simplement continue) si f continue en tout point $a \in I$.

L'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur I est noté $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

Intuitivement, ceci revient à pouvoir tracer la courbe représentative sans avoir à lever le crayon.

Exemple 2.2 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Cette fonction est-elle continue en 0 ?

Théorème 2.3 (opérations sur les fonctions continues)

Soit I un intervalle, et soient f et $g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

1. $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$
2. $fg \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$
3. Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bien définie sur I, et $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

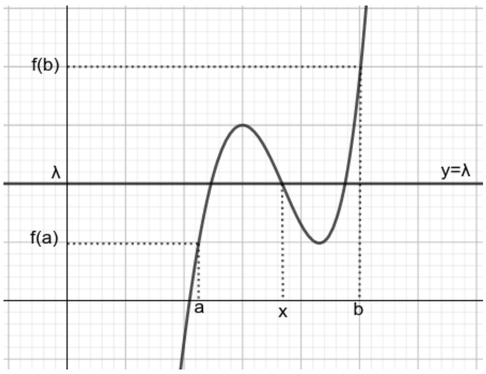
Théorème 2.4 (composition de fonctions continues)

Soient I et J deux intervalles, et soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
Alors la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.

Théorème 2.5 (théorème des valeurs intermédiaires)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \lambda$.

Illustration :



Cas particulier d'une fonction f continue et strictement monotone sur $[a,b]$:
Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, λ possède un antécédent, qui est unique car f est injective.

Théorème 2.6 (théorème de la bijection)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si f est strictement croissante, alors f est une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$.
2. Si f est strictement décroissante, alors f est une bijection de $[a,b]$ sur $[f(b),f(a)]$.

De plus, la bijection réciproque f^{-1} est continue et de même monotonie que f.

On a un résultat similaire lorsque l'intervalle de départ I est de la forme $]a\,;b[$, $[a\,;b[$ ou $]a\,;b]$, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, en modifiant l'intervalle d'arrivée de la manière suivante :

- si I est ouvert en a, on remplace $f(a)$ par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et on ouvre l'intervalle d'arrivée en cette valeur ;
- si I est ouvert en b, on remplace $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ et on ouvre l'intervalle d'arrivée en cette valeur.

3 Dérivation

3.1 Généralités

Définition 3.1 (fonction dérivable et dérivée)

Soit I un intervalle, et soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

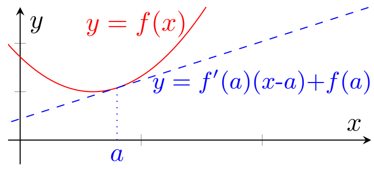
1. Pour un réel $a \in I$ donné, on dit que f est dérivable en a si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

   Lorsque c'est le cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.
2. On dit que f est dérivable sur I (ou plus simplement dérivable) si f est dérivable en tout point $a \in I$. Lorsque c'est le cas, on peut définir sa fonction dérivée f' qui est une application de I dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur I est noté $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

Remarque : Lorsque f est dérivable en a, sa courbe représentative admet une tangente au point de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ qui a pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$



Le nombre dérivé $f'(a)$ est donc égal au coefficient directeur de la tangente en a.

Exemple 3.2 : Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 3.3 (dérivable implique continue)

Soit I un intervalle, et soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Remarque : Attention, la réciproque est fausse. Contre-exemple : fonction valeur absolue en 0.

Théorème 3.4 (opérations sur les fonctions dérivables et leurs dérivées)

Soit I un intervalle, et soient f et $g \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

1. $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
2. $fg \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$
3. Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bien définie sur I, $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Théorème 3.5 (dérivabilité et dérivée d'une fonction composée)

Soient I et J deux intervalles, et soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
Alors la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Théorème 3.6 (dérivabilité et dérivée d'une fonction réciproque)

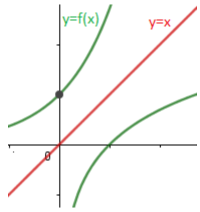
Soient I et J deux intervalles, et soit $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable.
Alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en tout point y de J tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, et pour un tel y on a la formule :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

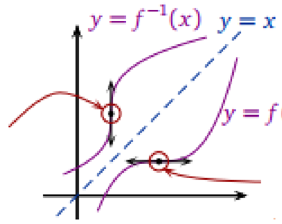
Cas particulier : si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J.

Remarque :

L'égalité précédente s'écrit aussi $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ où $y = f(x)$.
La pente de la tangente de la courbe C_f est l'inverse de la pente de la courbe $C_{f^{-1}}$.



La condition $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ i.e. $f'(x) \neq 0$ est indispensable pour garantir que f^{-1} soit dérivable en y.



Exemple 3.7 : On peut définir la fonction ln comme la bijection réciproque de exp où exp est l'unique fonction solution de $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$. Montrer que ln est dérivable et calculer sa dérivée.

Théorème 3.8 (caractérisation de la monotonie à l'aide de la dérivée)

Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. f est constante si et seulement si $f' = 0$.
2. f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
3. f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$.
4. f est strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ et s'il n'existe aucun intervalle non trivial (i.e. qui contient au moins deux points) sur lequel f' est la fonction nulle.
5. f est strictement décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$ et s'il n'existe aucun intervalle non trivial sur lequel f' est la fonction nulle.

Remarque : En particulier si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

3.2 Dérivées partielles pour une fonction de plusieurs variables

Définition 3.9 (dérivée partielle)

Soient I et J deux intervalles. Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in I \times J$.
Si $t \mapsto f(t,y)$ est dérivable en x, le nombre dérivé associé est noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
La dérivée partielle de f par rapport à la première variable x est l'application $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

Remarque : On peut étendre cette définition à une fonction de plusieurs variables et définir la dérivée partielle par rapport à chacune des variables.

Exemple 3.10 : Soit $f : (x,y) \mapsto y\ln(x^2 - y^2)$. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 3.11 (classe $\mathscr{C}^1$)

Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est une fonction dérivable dont la dérivée est continue.
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur I est noté $\mathscr{C}^1(I\,;\mathbb{R})$.

Remarque : Comme nous le verrons plus tard dans l'année, le caractère $\mathscr{C}^1$ est stable par combinaison linéaire (donc par somme et différence), par produit, par inverse et quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), ainsi que par composition.

3.4 Dérivées n-ièmes

Définition 3.12 (dérivée n-ième d'une fonction)

Soit I un intervalle, et soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Par convention, f est toujours « 0 fois dérivable », et on pose $f^{(0)} = f$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On dit que f est « n fois dérivable » si f est $n-1$ fois dérivable et la fonction $f^{(n-1)}$ est elle même dérivable.
   Dans ce cas, on appelle dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, la fonction $(f^{(n-1)})'$.

On note $\mathcal{D}^n(I\,;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Notation : $f^{(1)}$ correspond à f' ; $f^{(2)}$ est notée f''.

Exemple 3.13 : Calculer les dérivées successives de $f : x \mapsto x^3$.

Proposition 3.14 (linéarité de la dérivée n-ième)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit I un intervalle non trivial, et soient f et $g \in \mathcal{D}^n(I\,;\mathbb{R})$, et soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^n(I\,;\mathbb{R})$, et on a la relation suivante :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Théorème 3.15 (formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit I un intervalle non trivial, et soient f et $g \in \mathcal{D}^n(I\,;\mathbb{R})$.
Alors $fg \in \mathcal{D}^n(I\,;\mathbb{R})$ et on a la relation suivante :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Exemple 3.16 : Montrer que $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{2x}$ est infiniment dérivable et calculer ses dérivées successives.

Remarque : En particulier l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I est stable par combinaison linéaire (donc par somme et différence) ainsi que par produit.
Comme nous le verrons plus tard dans l'année, le caractère n fois dérivable est également stable par inverse et quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), ainsi que par composition.

4 Fonctions complexes de la variable réelle

On s'intéresse aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Pour une telle fonction on note $\mathfrak{Re}(f) : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathfrak{Re}(f(x)) \end{array}$ et $\mathfrak{Im}(f) : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathfrak{Im}(f(x)) \end{array}$

On étend de manière naturelle la notion de limite finie pour une fonction à valeurs complexes.
On a la caractérisation suivante pour la limite de $f : I \to \mathbb{C}$ en α (α dans I ou extrémité de I) :

$$\forall \ell \in \mathbb{C} : \qquad \lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \alpha} \mathfrak{Re}(f(x)) = \mathfrak{Re}(\ell) \\ \lim\limits_{x \to \alpha} \mathfrak{Im}(f(x)) = \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

Les opérations algébriques sur les limites finies (somme de limites, produit de limites, etc.) se généralisent aux limites complexes.

4.1 Continuité

On définit la notion de continuité de même que pour une fonction à valeurs réelles.
On a la caractérisation suivante pour une fonction $f : I \to \mathbb{C}$:

$$f \text{ continue} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ continues.}$$

Les théorèmes suivants se généralisent aux fonctions à valeurs complexes :

1. opérations sur les fonctions continues ;
2. continuité d'une fonction composée $g \circ f$ avec $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{C}$, I et J étant des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.1 (continuité d'une fonction définie avec l'exponentielle complexe)

Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I.
La fonction $\exp \circ f : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathbf{e}^{f(x)} \end{array}$ est continue sur I.

4.2 Dérivation

On définit les notions de dérivabilité et de dérivée de même que pour une fonction à valeurs réelles.
La définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ reste inchangée.
On a la caractérisation suivante pour une fonction $f : I \to \mathbb{C}$:

$$f \text{ dérivable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ dérivables}$$

et lorsque c'est le cas : $f' = \mathfrak{Re}(f)' + \mathbf{i}\mathfrak{Im}(f)'$. Par conséquent, $\mathfrak{Re}(f') = \mathfrak{Re}(f)'$ et $\mathfrak{Im}(f') = \mathfrak{Im}(f)'$.
Les théorèmes suivants se généralisent aux fonctions à valeurs complexes :

1. opérations sur les fonctions dérivables et leurs dérivées ;
2. dérivabilité et dérivée d'une fonction composée $g \circ f$ avec $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{C}$, I et J étant des intervalles de $\mathbb{R}$;
3. caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle.

Théorème 4.2 (dérivée d'une fonction définie avec l'exponentielle complexe)

Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.
La fonction $\exp \circ f : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathbf{e}^{f(x)} \end{array}$ est dérivable sur I, de dérivée $f' \times (\exp \circ f)$.

Cas particulier : Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \mathbf{e}^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto a\,\mathbf{e}^{ax}$.